

Прогибы предварительно натянутой гибкой весомой нити, закрепленной в двух произвольных точках

Кравчук А.С., Тарасюк И.А.

Белорусский государственный университет,
г. Минск, Беларусь

ask_belarus@inbox.ru, ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Аннотация. В работе получены дифференциальное уравнение провисания гибкой весо­мой нити, натянутой под произвольным углом к горизонту, и его решения в случае малых прогибов нити. Показано, что максимальное значение прогиба нити всегда достигается посередине ее проекции, а его величина не зависит от положения опор нити. Впервые в постановке задачи предполагалось, что нить растягивается под действием двух независимых факторов: деформации предварительного натяжения и деформации, обусловленной силой тяжести, каждая из которых может отсутствовать по соображениям относительной малости. Вследствие этого предлагаемое решение задачи верно даже в случае равенства исходной длины нити расстоянию между точками до ее закрепления, что гарантирует отсутствие предварительного натяжения нити. Рассмотрен случай деформации нити в однородном температурном поле, при этом показано, что термическое удлинение нити может быть сведено к предварительному натяжению. Установлено, что если предварительное натяжение нити меньше максимально возможного температурного сжатия нити, представленная модель становится неверна. В случае отсутствия предварительного натяжения (или в случае, когда предварительное натяжение совпадает с максимальным температурным удлинением) рассмотрены варианты решений задачи об определении прогибов не только для линейно упругого поведения материала, но и для реологически активного материала нити. Отмечены методические особенности решения задачи об определении уравнения провисания для разных стадий ползучести материала на примере применения уравнения Кельвина-Фойгта для моделирования обоих случаев процесса. Приводятся решения для комбинированного использования модели Кельвина-Фойгта и линейной наследственной вязкоупругости для первичной и вторичной стадий ползучести материала нити, соответственно. Рассмотрены также вопросы моделирования с помощью модифицированных реологических моделей высыхания и сокращения нити из биологической ткани.

Ключевые слова: предварительно натянутая нить, прогибы весо­мой нити, ползучесть, реология, такелаж.

ВВЕДЕНИЕ

Гибкая нить является расчетной схемой несущих элементов самых разнообразных конструкций: висячих мостов и вантово-балочных систем, различных типов висячих покрытий промышленных и гражданских зданий, канатных дорог, линий электропередачи, контактных железных дорог, воздушно-трелевочных установок [1]. Деформирование указанных конструкций происходит за счет действия силы тяжести, что обуславливает практический интерес исследования прогиба весо­мой нити.

Результат известного решения по гибким нитям [2] не может быть распространен на случай предварительного

натяжения весо­мой нити ввиду предположения о значительном превышении длины нити расстояния между ее креплениями. Кроме того, выглядит несколько неожиданно, что в этом исследовании не фигурируют такие параметры, как плотность материала нити и ускорение свободного падения. Также в упомянутом решении существует ряд опечаток математического характера, а при вычислении осевой деформации нити опускаются преобразования, и сообщается, что по «известной формуле» деформация определяется неверным асимптотическим уравнением [2-4], ошибка которого обусловлена неверным вычислением интегральной длины нити, что, в свою очередь, приводит к неверным выражениям для осевых деформаций и напряжений.

Отметим, что неправильное вычисление длины нити, поперечные перемещения которой определяются параболой [2-4], обусловлено тем, что в подынтегральном выражении корень приближается известным отрезком ряда и затем вычисляется интеграл. В данной статье сначала вычисляется интеграл, а затем полученный результат приближается степенным рядом. Вычисленная таким образом деформация нити более чем в 10 раз меньше общеизвестного выражения [2-4], которое, очевидно, игнорирует некоторые слагаемые в ряду после его интегрирования.

Ранее автором была рассмотрена задача о прогибах горизонтально натянутой нити в терминах осевого напряжения [5], однако в данной работе предполагалось, что напряжения от предварительного натяжения во много раз превосходят по величине возникающих от действия силы тяжести. Настоящая статья посвящена исследованию прогибов произвольно закрепленной нити от собственного веса с учетом предварительного натяжения, включающего температурное удлинение равномерно разогретой нити. При этом предлагаемое решение справедливо и при отсутствии предварительного натяжения, т.е. когда длина нити при ее линейном термическом удлинении совпадает с расстоянием между точками крепления.

Кроме того, в статье впервые приведены решения ряда задач для различных моделей поведения материалов от высокопрочных сталей до реологически активных полимеров и даже биоматериалов в случае равенства длины нити и расстояния между точками ее крепления, и, соответственно, ее провисания только под собственным весом.

МАЛЫЕ ПРОГИБЫ ГИБКОЙ ВЕСОМЫЙ НИТИ

С целью получения уравнения провисания произвольно закрепленной гибкой весо­мой нити произведем обобщение вывода уравнения прогиба нити при ее горизонтальном

натяжении [5]. При этом в данном случае нить, вообще говоря, может и не иметь предварительного натяжения.

Рассматривается закрепленная на концах гибкая весомая нить длины ℓ , перемещение $u(x)$ точек которой под действием силы тяжести происходит в плоскости xOy параллельно оси Oy . Не нарушая общности, будем считать, что нить закреплена в точках $a(0,0)$ и $b(\ell \cos \alpha, \ell \sin \alpha)$ (Рис. 1). Отметим, что при решении задачи перемещение точек вдоль нити при предварительном натяжении не учитывается, поскольку не представляет практического интереса.

Рассмотрим малый участок нити длиной $d\ell$, соответствующий интервалу (x_1, x_2) на оси Ox (Рис. 1). Поскольку уравнение кривой, определяющей положение провисающей весомой нити, имеет вид $U(x) = x \operatorname{tg} \alpha + u(x)$, длина рассматриваемого участка нити равна:

$$d\ell = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta(x)} dx = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{du}{dx} \right)^2} dx, \quad (1)$$

где $\beta(x)$ – угол между касательной к функции $U(x)$ и осью Ox .

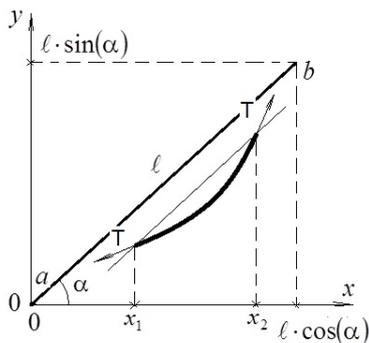


Рис. 1. Схема провисания участка весомой гибкой нити

Из (1) следует, что только при малых прогибах нити длина рассматриваемого участка не изменяется и равна $(x_2 - x_1)/\cos \alpha$, т.е. при условии $\frac{du}{dx} \ll 1$. В этом случае

$$\sin \beta(x) \approx \sin \alpha + \cos \alpha \frac{du}{dx} \quad \text{и} \quad \cos \beta(x) \approx \cos \alpha.$$

Пусть T – сила натяжения нити, действующая на концах участка нити. Тогда, как и предполагалось, движение точек нити осуществляется только в направлении оси Oy , поскольку $\cos \beta(x_1) + \cos \beta(x_2) = 0$. В свою очередь, вертикальная составляющая силы натяжения уравновешивается действующей на участок нити силой тяжести. Если ρ – плотность материала, а S – площадь поперечного сечения нити, исходя из баланса действующих сил, получим:

$$T \cos \alpha \frac{du}{dx} \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \rho g S d\ell = \int_{x_1}^{x_2} \left(T \cos \alpha \frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{\rho g S}{\cos \alpha} \right) dx = 0 \quad (2)$$

Пусть $\sigma_{oc} = T/S$ – среднее осевое напряжение натяжения. Тогда, используя теорему о среднем, с учетом произвольности выбора x_1 и x_2 соотношение (2) приводит к локальному уравнению провисания натянутой нити:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{\rho g}{\sigma_{oc}}, \quad (3)$$

решением которого с учетом крайних условий $u(0) = u(\ell \cos \alpha) = 0$ является:

$$u = \frac{\rho \cdot g \cdot \ell^2}{2 \sigma_{oc}} \frac{x}{\ell \cos \alpha} \left(\frac{x}{\ell \cos \alpha} - 1 \right). \quad (4)$$

Из (4) следует, что максимальное провисание нити $u_{\max} = -\rho g \ell^2 / 8 \sigma_{oc}$ всегда достигается посередине проекции нити на ось Ox .

Учитывая симметричность прогибов (4), можно предполагать, что на каждую из опор действует вес, равный половине веса нити. Кроме того, на обе опоры действуют силы величиной $\sigma_{oc} S = T$, имеющие осевое направление, которое определяется углом α , в соответствие с гипотезой о малости прогибов нити. Таким образом, значения вертикальных составляющих сил, действующих на опоры в точках a и b , будут равны $T \sin \alpha - \rho g \ell S / 2$ и $-(T \sin \alpha + \rho g \ell S / 2)$, соответственно. Тогда опора в точке a всегда будет разгружена при условии $\alpha \geq \arcsin(\rho g \ell S / (2T))$.

Пусть δ – максимально допустимый относительный разброс нагрузок вдоль оси Oy при закреплении нити, тогда $\alpha_{don} \leq \arcsin(\delta \rho g \ell S / (2T))$ и максимально допустимый абсолютный разброс высот при креплении нити $\Delta_{don} = \delta \rho g \ell^2 S / (2T)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСЕВОЙ ДЕФОРМАЦИИ НИТИ

Для определения величины провисания нити необходимо установить с осевое напряжение σ_{oc} , являющееся комбинацией двух независимых факторов: действия силы тяжести и предварительного натяжения, которое, вообще говоря, может отсутствовать. Далее будет показано, что допустимые длина нити ℓ и величина предварительного натяжения $\Delta \ell$, а также физические параметры ее материала участвуют в вычислении величины σ_{oc} . Таким образом, ограничения на ℓ и $\Delta \ell$ должны определяться исходя из неравенства $k \sigma_{oc} \leq [\sigma]$, где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение для материала нити, k – коэффициент запаса прочности.

С целью определения осевой деформации нити ε_{oc} произведем оценку длины деформированной нити посредством разложения в ряд Маклорена относительно величины $\rho g \ell / (2 \sigma_{oc})$:

$$L = \int_0^{\ell \cos \alpha} \sqrt{1 + \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{\rho g \ell^2}{2 \sigma_{oc}} \frac{1}{\ell \cos \alpha} \left(\frac{2x}{\ell \cos \alpha} - 1 \right) \right)^2} dx = \ell (1 + \varepsilon_{oc}) \approx \ell \left(1 + (\rho g \ell \cos \alpha / \sigma_{oc})^2 / 24 \right),$$

откуда получим:

$$\varepsilon_{oc} = \varepsilon_{тяж} + \varepsilon_{деф} \approx (\rho g \ell \cos \alpha / \sigma_{oc})^2 / 24, \quad (5)$$

где $\varepsilon_{тяж}$ – деформация нити под действием силы тяжести, $\varepsilon_{деф} = \Delta \ell / \ell$ – деформация предварительного натяжения.

Таким образом, деформация нити определяется по (5) из уравнения состояния материала нити $\sigma_{oc} = \mathfrak{I}(\varepsilon_{oc})$ в случае ее одноосного нагружения:

$$(\varepsilon_{мяж} + \Delta\ell/\ell) \cdot \mathfrak{I}^2(\varepsilon_{мяж} + \Delta\ell/\ell) \approx (\rho g \ell \cos \alpha)^2 / 24. \quad (6)$$

Чтобы построенная модель (1)-(6) была верна и в случае однородного изменяющегося во времени температурного поля, необходимо определить наибольший перепад температуры ΔT_{max} за заданный промежуток времени (например, год), на основе которого установить наибольшую термическую деформацию $\varepsilon_{тепл} = \gamma \cdot \Delta T_{max}$, где γ – коэффициент линейного теплового расширения материала. Подставляя полученный результат в (6), получим:

$$(\varepsilon_{мяж} + \Delta\ell/\ell - \gamma \Delta T_{max}) \cdot \mathfrak{I}^2(\varepsilon_{мяж} + \Delta\ell/\ell - \gamma \Delta T_{max}) \approx (\rho g \ell \cos \alpha)^2 / 24. \quad (7)$$

Здесь, очевидно, рассматривается только случай сужения нити под действием температурного поля, ввиду того, что при термическом удлинении нити задача сводится к случаю предварительно натянутой нити. Из (7) можно сделать вывод, что для верности полученной модели необходимо, чтобы предварительное натяжение нити $\Delta\ell$ удовлетворяло неравенству:

$$\Delta\ell \geq \gamma \cdot \ell \cdot \Delta T_{max}. \quad (8)$$

Когда выражение (8) становится равенством, уравнение (7) приобретает наиболее простой вид в случае отсутствия предварительного натяжения:

$$\varepsilon_{мяж} \cdot \mathfrak{I}^2(\varepsilon_{мяж}) \approx (\rho g \ell \cos \alpha)^2 / 24. \quad (9)$$

Если материал нити линейно упругий, из (9) можно получить:

$$\sigma_{oc} = \sqrt[3]{E(\rho g \ell \cos \alpha)^2 / 24}, \quad (10)$$

тогда на опоры нити, висящей без предварительного натяжения, действует горизонтальная сила величиной $T \cos \alpha = S \sqrt[3]{E(\rho g \ell)^2 \cos^5 \alpha / 24}$, а допустимый разброс высот при закреплении нити определяется уравнением:

$$\Delta_{дон} = \delta \sqrt[3]{\frac{3 \rho g \ell^4}{E \cos^2 \alpha}}.$$

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ

Во многих физических процессах различают две стадии их протекания: неустановившийся и установившийся процессы. Поскольку в подавляющем большинстве технических изделий вторичная стадия любого процесса несопоставимо больше первичной в смысле отношений длин временных интервалов, обычно предполагается, что первичная стадия вообще отсутствует и тело мгновенно при $t=0$ приобретает окончательные для первичной стадии значения [7].

Этот естественный прием, используемый при решении задач ползучести сталей и других прочных материалов, является слишком грубым допущением для ряда полимеров и биоматериалов. Участок неустановившейся ползучести может оказывать существенное влияние на картину деформирования тел из данных материалов, поскольку по своей величине сопоставим с участком установившейся ползучести в силу специфики действия – хоть и квазистатических – кратковременных нагрузок.

Под неустановившейся ползучестью понимается стадия, характеризующаяся постепенно уменьшающейся скоростью деформации. При достижении некоторого постоянного значения скорости деформирования наступает стадия установившейся ползучести. При этом предполагается, что ползучесть является процессом квазистатическим, т.е. скорость изменения деформаций в твердом теле существенно меньше скорости распространения механической волны. Таким образом, несмотря на то, что в решениях всегда задействован параметр времени, инерционными характеристиками материала пренебрегают, и они не участвуют в расчете.

На основании этого можно сделать вывод, что при постоянном осевом напряжении неустановившаяся ползучесть может быть описана моделью Кельвина-Фойгта, в то время как установившуюся проще и достовернее описать с помощью наследственной теории [7]. При этом в качестве начального значения в наследственном законе принимается мгновенная осевая деформация тела в соответствие с мгновенной диаграммой растяжения, которую, предполагается, тело приобрело за время неустановившейся ползучести.

Наследственный закон с достаточной точностью моделирует постоянную скорость деформации лишь на некотором удалении от начала процесса. Поэтому границу стадий ползучести будем устанавливать не по поведению скорости процесса, а по достижению при неустановившейся ползучести распределения напряжений и деформаций, соответствующих статическому расчету с использованием мгновенных уравнений состояния. В этом случае совершенно логичным будет переход к расчету поведения тела при установившейся ползучести с начальными значениями напряжений и деформаций, также полученными с помощью мгновенных уравнений состояния.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО СИЛЫ ТЯЖЕСТИ.

Не нарушая общности, будем предполагать, что осевое напряжение $\sigma_{oc,n}(t)$ от действия силы тяжести до закрепления нити отсутствует, т.е. $\sigma_{oc,n}(0) = 0$, а после закрепления при неустановившейся ползучести (при $0 < t < t_n$, где t_n – момент окончания первичной стадии) определяется по формуле (10).

На интервале времени $0 \leq t < t_n$ относительное осевое удлинение нити из-за реологии определяется функцией $\varepsilon_{oc,n}(t)$, удовлетворяющей уравнению состояния Кельвина-Фойгта [8]:

$$\sigma_{oc}(t) = E \varepsilon_{oc,n}(t) + \eta_n \dot{\varepsilon}_{oc,n}(t), \quad (11)$$

где $\dot{\varepsilon}_{oc,n}(t) = \frac{\partial \varepsilon_{oc,n}(t)}{\partial t}$ – скорость относительного удлинения нити, η_n – вязкость неустановившейся ползучести. Решением (11) является выражение:

$$\varepsilon_{oc,n}(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{24} \left(\frac{\rho g \ell \cos \alpha}{E} \right)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta_n}\right) \right)}, \quad 0 < t < t_n. \quad (12)$$

Будем предполагать, что перемещение точек нити при неустановившейся ползучести так же, как и упругом случае (4), описывается параболой $u_n^{K\Phi}(t) = \left(x^2 / (\ell \cos \alpha) - x \right) \Omega_n^{K\Phi}(t)$,

где $\Omega_n^{K\Phi}(t)$ – подлежащая определению функция. Тогда, используя (5) для вычисления длины растянутой из-за реологии нити, можно получить:

$$L_n^{K\Phi}(t) \approx \ell \left(1 + \Omega_n^{K\Phi^2}(t) \cos^4 \alpha / 6 \right). \quad (13)$$

С другой стороны, $L_n^{K\Phi}(t) = \ell(1 + \varepsilon_{oc,n}(t))$, и, следовательно, перемещение точек нити под действием силы тяжести при неустановившейся ползучести по модели Кельвина-Фойгта можно описать уравнением:

$$u_n^{K\Phi}(t) = \sqrt[3]{\frac{3\rho g \ell}{E \cos^5 \alpha}} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta_n}\right)} \left(\frac{x^2}{\ell \cos \alpha} - x \right), \quad (14)$$

$$0 < t < t_n.$$

Очевидно, при неустановившейся ползучести величина вязкости материала η_n выбирается такой, чтобы при оценочном времени неустановившегося процесса $t_n < 5c$ с достаточным приближением выполнялось равенство:

$$\exp(-Et_n/\eta_n) \approx 0. \quad (15)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА-ФОЙГТА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Будем предполагать, что при установившейся ползучести (при $t \geq t_n$) осевое напряжение нити $\sigma_{oc,n}(t)$ от силы тяжести так же определяется по формуле (10), а в момент времени t_n нить натянута как чисто упругая и ее прогиб в силу (15) достаточно точно совпадает с (4).

Кроме того, будем полагать, что дополнительное относительное осевое удлинение нити из-за реологического поведения при установившейся ползучести определяется функцией $\varepsilon_{oc,y}(t)$ (где $\varepsilon_{oc,y}(t_n) = 0$), также удовлетворяющей уравнению состояния Кельвина-Фойгта [8]:

$$\sigma_{oc}(t) = E \varepsilon_{oc,y}(t) + \eta_y \dot{\varepsilon}_{oc,y}(t), \quad (16)$$

где η_y – вязкость материала при установившейся ползучести. Решением (16) является выражение:

$$\varepsilon_{oc,n}(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{24} \left(\frac{\rho g \ell \cos \alpha}{E} \right)^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{E(t-t_n)}{\eta_n}\right) \right), \quad (17)$$

$$t > t_n.$$

Будем предполагать, что дополнительные перемещения точек нити от удлинения при установившейся ползучести также распределяются по параболе $u_y^{K\Phi}(t) = (x^2/(\ell \cos \alpha) - x) \Omega_y^{K\Phi}(t)$. Тогда аналогично (13) получим:

$$\Omega_y^{K\Phi}(t) = \sqrt[3]{\frac{3\rho g \ell}{E \cos^5 \alpha}} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{E(t-t_n)}{\eta_n}\right)}, \quad (18)$$

$$t > t_n.$$

Таким образом, суммарное перемещение точек нити под действием силы тяжести при ползучести материала нити по модели Кельвина-Фойгта на произвольном интервале времени $[0, t)$ можно описать уравнением:

$$u^{K\Phi}(t) = \sqrt[3]{\frac{3\rho g \ell}{E \cos^5 \alpha}} \left(\frac{x^2}{\ell \cos \alpha} - x \right) \times \left(\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta_n}\right)} + \theta(t-t_n) \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{E(t-t_n)}{\eta_n}\right)} \right), \quad (18)$$

где $\theta(t-t_n)$ – функция Хевисайда.

Из (18) следует, что при вязкоупругом поведении материала невозможно увеличение прогибов нити более чем в два раза по сравнению с упругим случаем. Кроме того, применение модели Кельвина Фойгта во второй стадии ползучести связано с тем, что при ее использовании скорость деформации резко падает практически до нуля, и процесс установившейся ползучести фактически будет отсутствовать в широком диапазоне времени.

Таким образом, использование модели Кельвина-Фойгта для описания установившейся ползучести возможно только при рассмотрении реологического поведения биологических и близких к ним по характеристикам полимерных материалов на относительно коротких промежутках времени. Этот недостаток данной модели при установившейся ползучести можно исправить использованием простейшего экспоненциального разностного ядра в наследственном уравнении ползучести.

ПРИМЕНЕНИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ НИТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТОЛЬКО СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

На временном интервале $t > t_n$ рассмотрим закон установившейся ползучести в виде уравнения Вольтерра при постоянном осевом напряжении σ_{oc} (10) [8]. Поскольку в интегральном представлении наследственной интерпретации первое слагаемое – это мгновенный результат неустановившейся ползучести, а второе – это собственно наследственная ползучесть [9], учитывая условие (15), в данном случае представляет интерес только второе слагаемое:

$$\varepsilon_{oc,y}(t) = \frac{1}{E} \sigma_{oc} \int_{t_n}^t \Gamma(t-\tau) d\tau, \quad (19)$$

где $\Gamma(t-\tau)$ – разностное ядро ползучести.

Будем предполагать, что дополнительные перемещения точек нити $u_y^B(t)$ от ее удлинения при установившейся ползучести также распределяются по параболе $u_y^B(t) = (x^2/(\ell \cos \alpha) - x) \Omega_y^B(t)$. Тогда аналогично (14) и (18), суммарное перемещение точек нити под действием силы тяжести при неустановившейся ползучести по модели Кельвина-Фойгта и установившейся ползучести по наследственной теории на произвольном интервале времени можно описать уравнением:

$$u(t) = \sqrt[3]{\frac{3\rho g \ell}{E \cos^5 \alpha}} \left(\frac{x^2}{\ell \cos \alpha} - x \right) \times \left(\sqrt{1 - \exp\left(-\frac{Et}{\eta_n}\right)} + \theta(t-t_n) \sqrt{\int_{t_n}^t \Gamma(t-\tau) d\tau} \right). \quad (20)$$

С физико-математической точки зрения, уравнение (20) является предпочтительным, поскольку позволяет описывать ползучесть как процесс с постоянной скоростью на больших временных интервалах, что необходимо для высокопрочных материалов. Однако оно требует за счет выбора параметров разностного ядра $\Gamma(t-\tau)$ провести гладкое сопряжение временных функций стадий ползучести в точке t_n , т.е. с учетом (15) должно выполняться:

$$\left(\frac{d}{dt}\Gamma(t)\right)_{t=0} = 0. \quad (21)$$

Таким образом, при построении единой феноменологической модели ползучести нити, разностное ядро наследственной части должно удовлетворять условию (21), которое автоматически выполняется для ядер в виде убывающих экспонент или их суммы с различными степенями аргумента.

К ВОПРОСУ О МОДЕЛИРОВАНИИ УМЕНЬШЕНИЯ ПРОВИСАНИЯ НИТЕПОДОБНОГО ФРАГМЕНТА БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ ЕЕ ВЫСЫХАНИИ

В связи с использованием в настоящее время не только полимерных, но и биологических структур в биомеханических изделиях представляется интересным построить механическую модель натяжения нити при ее высыхании. Данная задача имеет значение, например, для биомедицинских тестов, т.к. скорость высыхания и, следовательно, сокращения нитеподобной биологической ткани в норме и при патологии будут различаться.

При высыхании биологической ткани, кроме ее укорочения, одним из определяющих факторов является изменение ее плотности. Поэтому в поставленной задаче функция изменения плотности материала $\rho(t)$ предполагается известной, а процесс высыхания рассматривается как квазистатический.

Очевидно, если не принимать в рассмотрение сокращение биологической ткани, провисание ее нитеподобного фрагмента будет описываться уравнением, аналогичным (4), с учетом переменной плотности $\rho(t)$.

Для описания укорочения нитеподобного фрагмента будем предполагать, что для ткани известны модуль упругости $E_{\text{био}}$ и вязкость $\eta_{\text{био}}$. Поскольку процесс сокращения ткани при высыхании в механическом смысле имеет обратную тенденцию по сравнению с ползучестью, для моделирования сокращения образца при высыхании можно использовать закон, аналогичный Кельвина-Фойгта:

$$\sigma_{\text{ос, био}}(t) = E_{\text{био}} \varepsilon_{\text{ос, био}}(t) - \eta_{\text{био}} \dot{\varepsilon}_{\text{ос, био}}(t), \quad (22)$$

где $\varepsilon_{\text{ос, био}}(t)$ – дополнительное относительное осевое сокращение ткани.

Отметим, что формально (22) отличается от (11) только знаком, указывающим на обратный процесс. Не повторяя дословно рассуждений предыдущих пунктов, запишем результат для (22) без исследования предварительных неустановившихся процессов:

$$u_{\text{био}}(t) = 3 \sqrt{\frac{3\rho g \ell}{E \cos^5 \alpha}} \left(\frac{x^2}{\ell \cos \alpha} - x \right) \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{E_{\text{био}} t}{\eta_{\text{био}}}\right)}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены дифференциальное уравнение малых прогибов произвольно закрепленной гибкой весомой нити, и его решение, согласно которому максимальное провисание достигается посередине проекции нити.

Впервые рассматривается случай деформирования нити под действием собственного веса и предварительного натяжения, причем, полагалось, что каждый из факторов деформирования может отсутствовать по соображениям относительной малости. Таким образом, полученное решение задачи верно даже в случае отсутствия предварительного натяжения нити.

Рассмотрен случай деформирования нити в однородном температурном поле, при этом показано, что термическое удлинение нити может быть сведено к предварительному натяжению. Показано, что представленная модель становится неверна, если максимально возможное температурное сжатие нити превышает величину предварительного натяжения.

Для случаев отсутствия предварительного натяжения и равенства температурной деформации предварительному натяжению представлены решения задачи об определении прогибов не только для линейно упругого поведения материала, но и для реологически активного материала нити. Отмечены методические особенности решения задачи об определении уравнения провисания для разных стадий ползучести материала на примере применения уравнения Кельвина-Фойгта для моделирования обоих случаев процесса. Приводятся решения для комбинированного использования модели Кельвина-Фойгта и линейной наследственной вязкоупругости для первичной и вторичной стадий ползучести материала нити, соответственно. Рассмотрены также вопросы моделирования с помощью модифицированных реологических моделей высыхания и сокращения нити из биологической ткани.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скворцов А.В. Расчетные модели гибкой нити применительно к висячим мостам и вантово-балочным системам: дис. ... канд. техн. наук. – Москва, 2005. – 248 с.
2. Решение задач и выполнение письменных работ по ТОЭ (Теоретические основы электротехники), высшей математике, физике, программированию, термеху... – URL: <http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/15.html> (дата обращения 01.08.2017).
3. Виноградов Г.Г. Расчет строительных пространственных конструкций. – Л.: Стройиздат, 1990. – 264 с.
4. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
5. Кравчук А.С. Малые поперечные прогибы весомой горизонтально натянутой нити под действием силы тяжести / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2015. – №2 – URL: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2015/Kravchuk-Kravchuk.pdf> (дата обращения 01.08.2017)
6. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
7. Кравчук А.С. Моделирование ползучести по наследственной теории в простейшей модели деформируемого покрытия постоянной толщины / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – №2 – URL: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf> (дата обращения 01.08.2017).

8. Кравчук А.С. Механика контактного взаимодействия тел с круговыми границами. / А.С. Кравчук, А.В. Чигарев. – Минск: Технопринт, 2000. – 196 с.

9. Ржаницын А.Р. Теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1968. – 418 с.

10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.

DOI: 10.24892/RIJIE/20170404

Deflection of Pre-Tensioned Flexible Heavy Rope, Fixed in Two Arbitrary Points

Kravchuk A.S., Tarasyuk I.A.

Belarusian State University,
Minsk, Belarus

ask_belarus@inbox.ru, ivan.a.tarasyuk@gmail.com

Abstract. In this paper, it is obtained the differential equation of sagging of flexible heavy rope stretched at an arbitrary angle to the horizon and its solution in the case of small deflections. It is shown that the maximum deflection is always achieved in the middle of rope projection, and its magnitude does not depend on the position of supports. For the first time in the formulation of the problem, it is assumed that the rope is stretched under the influence of two independent factors: deformation of the prestress and deformation due to gravity, and each of the factors may not be taken into account. It is considered the case of rope deformation in a homogeneous temperature field, and it is established that the presented model becomes incorrect in the case of small pre-tension in comparison with thermal deformation. For cases of absence of pre-tension and the equality of temperature deformation and pre-tension, solutions to the problem are represented for the linearly elastic and rheologically active materials. It is noted methodical features of solving the problem for different stages of creep using the Kelvin-Voigt equation. Solutions are given for the combined use of the Kelvin-Voigt model and linear hereditary viscoelasticity for the primary and secondary creep stages, respectively. The problems of modeling drying and reduction of biological filament are considered.

Keywords: pre-tensioned rope, deflection of heavy rope, creep, rheology, rigging.

REFERENCES

1. Skvortsov A.V. *Raschetnye modeli gibkoy niti primenitel'no k visyachim mostam i vantovo-balochnym sistemam: dis. ... kand. tekhn. nauk* [Calculating models of a flexible thread are applied to hanging bridges and cable-beam systems. PhD dissertation], Moscow, 2005, 248 p. (in Russ.)

2. *Reshenie zadach i vypolnenie pis'mennykh rabot po TOE (Teoreticheskie osnovy elektrotehniki), vysshey matematike, fizike, programmirovaniyu, termekhu ...* [Solving problems and performing written works on the TOE (Theoretical fundamentals of electrical engineering), higher mathematics, physics, programming, termekhu ...] Available at: <http://www.toehelp.ru/theory/sopromat/15.html> (accessed 17 September 2017). (in Russ.)

Библиографическое описание статьи

Кравчук А.С. Прогибы предварительно натянутой гибкой несомой нити, закрепленной в двух произвольных точках / А.С. Кравчук, И.А. Тарасюк // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. – 2017. – Т.5, №4. – С. 35-40. DOI: 10.24892/RIJIE/20170404

3. Vinogradov G.G. *Raschet stroitel'nykh prostranstvennykh konstruktsiy* [Calculation of building spatial structures], Leningrad, Stroiizdat, 1990, 264 p. (in Russ.)

4. Merkin D.R. *Vvedenie v mehaniku gibkoy niti* [Introduction to flexible thread mechanics], Moscow, Nauka, 1980, 240 p. (in Russ.)

5. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Small transverse deflections of weight horizontal spanned cord by gravity [Malyye poperechnyye progiby vesomoy gorizontally natanutoy niti pod deystviem sily tyazhesti], *APRIORI. Seriya: Estestvennyye i tehnikheskie nauki* [APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences], 2015, no.2 (available at: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2015/Kravchuk-Kravchuk.pdf>). (in Russ.)

6. Lukash P.A. *Osnovy nelineynoy stroitel'noy mehaniki* [Fundamentals of nonlinear construction mechanics. Lukash] Moscow, Stroiizdat, 1978, 204 p. (in Russ.)

7. Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Simulation on creep by hereditary theory in a simple model of constant thickness deformed coating [Modelirovanie polzuchesti po nasledstvennoy teorii v prosteyshey modeli deformiruемого pokrytiya postoyannoy tolshhiny], *APRIORI. Seriya: Estestvennyye i tehnikheskie nauki* [APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences], 2014, no.2 (available at: <http://apriori-journal.ru/seria2/2-2014/Kravchuk-Kravchuk.pdf>). (in Russ.)

8. Kravchuk A.S., Chigarev A.V. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya tel s krugovymi granitsami* [Mechanics of contact interaction of bodies with circular boundaries], Minsk, Technoprint, 2000, 196 p. (in Russ.)

9. Rzhantsyn A.R. *Teoriya polzuchesti* [Creep theory], Moscow, Stroyizdat, 1968, 418 p. (in Russ.)

10. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep], Moscow, Mashinostroenie, 1975, 400 p. (in Russ.)

Reference to article

Kravchuk A.S., Tarasyuk I.A. Deflection of pre-tensioned flexible heavy rope, fixed in two arbitrary points, *Russian Internet Journal of Industrial Engineering*, 2017, vol.5, no.4, pp. 35-40. DOI: 10.24892/RIJIE/20170404