DOI: 10.24892/RIJIE/20230307

Построение функциональных наблюдателей

Жирабок А.Н., Бобко Е.Ю., Ким Чхун Ир
Дальневосточный федеральный университет
г. Владивосток, Российская Федерация
zhirabok@mail.ru

Зуев А.В.
Институт проблем морских технологий ДВО РАН
г. Владивосток, Российская Федерация
alvzuev@yandex.ru

Аннотация. **Рассматривается задача построения функциональных наблюдателей для нелинейных динамических систем, описываемых дискретными моделями и подверженных внешним возмущениям. Приводятся соотношения, позволяющие построить наблюдатель минимальной сложности, не чувствительный к возмущениям или минимально чувствительный к ним, оценивающий заданную функцию вектора состояния. Для решения используется логико-динамический подход, позволяющий решать задачи для нелинейных систем линейными методами. Решение опирается на редуцированную модель исходной системы, что позволяет уменьшить сложность стоящихся наблюдателей. Теоретические результаты иллюстрируются примером.**

Ключевые слова: **нелинейные системы, функциональные наблюдатели, редуцированная модель, линейная алгебра.**

Введение

Задача оценки заданной функции вектора состояния динамической системы имеет многочисленные приложения в практике и теории систем. Методам построения функциональных наблюдателей посвящены многочисленные публикации, в которых эта задача решается для различных классов систем: линейных [1-7], нелинейных [8-11], нечетких [12, 13], сингулярных [14, 15], с запаздыванием [16]. Пониженная (по сравнению с исходной системой) размерность таких наблюдателей позволяет упростить их программную реализацию. Наиболее интересные приложения функциональных наблюдателей относятся к области построения интервальных наблюдателей [1, 5-7] и диагностических наблюдателей [11, 16].

Отметим, что в работах [8, 11] класс систем, для которых строятся такие наблюдатели, ограничен такими нелинейными системами, для которых возможна точная линеаризация, поскольку предлагаемая там процедура предполагает построение линейного наблюдателя.

В настоящей работе развивается подход к построению функциональных наблюдателей для динамических систем, описываемых динамическими моделями с негладкими нелинейностями при наличии внешних возмущений. В отличие от [8, 11] предлагаемый подход не предполагает линеаризацию нелинейных моделей, что расширяет класс систем, для которых такие наблюдатели могут быть построены. Для решения задачи используется логико-динамический подход, позволяющий анализировать нелинейные системы методами линейной алгебры [17].

Основные модели

К решению рассматриваемой задачи построения функциональных наблюдателей для нелинейных систем может быть применен подход на основе так называемой алгебры функций, позволяющий получить решение для систем с негладкими нелинейностями. Этот подход дает общее решение задачи, но требует применения сложного математического аппарата. Предлагаемый в настоящей работе так называемый логико-динамический подход [17] при наложении на исходную систему некоторых ограничений позволяет также рассматривать системы с негладкими нелинейностями, но решение может быть получено методами линейной алгебры.

Для применения логико-динамического подхода представим исходную систему в виде

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t)+Gu(t)+C\Psi(x(t),u(t))+L\rho(t), \\ y(t) &= Hx(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x(t)\in X\subseteq R^n$, $u(t)\in U\subseteq R^m$, $y(t)\in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода; $\rho(t)\in R^s$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая возмущения на систему, задаваемые матрицей L; матрицы F и G описывают линейную динамику, матрица C – вклад нелинейных составляющих, представленных в виде

$$\Psi(x,u)=\begin{pmatrix}\varphi_1(A_1x,u)\\ \dots \\ \varphi_q(A_qx,u)\end{pmatrix},$$

$A_1,\dots,A_q$ – матрицы-строки; $\varphi_1,\dots,\varphi_q$ – нелинейные (возможно, негладкие) функции. Предполагается, что подлежащая оценке функция вектора состояния задается в виде $z(t)=Mx(t)$ для известной матрицы M.

Для реализации логико-динамического подхода вначале из модели (1) удаляется нелинейный член, далее для полученной линейной системы и дополнительных ограничений строится линейный функциональный наблюдатель, к которому на последнем этапе добавляется преобразованный нелинейный член. Опишем решение на втором этапе, где, как основа наблюдателя, строится линейная модель, не чувствительная к возмущению, имеющая вид

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t)+G_*u(t)+J_*y_*(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t)+Qy_0(t). \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь

$$y_*(t)=H_*x(t)=\begin{pmatrix}y(t)\\ z(t)\end{pmatrix},\qquad H_*=\begin{pmatrix}H\\ M\end{pmatrix},$$

матрицы $x(t)\in R^k$, F_*, G_*, J_*, H_*, H_z и Q подлежат определению, переменная $y_0(t)$ поясняется ниже.

Построение линейной модели

В варианте решения на основе алгебры функций предполагается, что $x_*(t)=\varphi(x(t))$ для некоторой функции φ; в логико-динамическом подходе эта функция линейна и зависимость имеет вид $x_*(t)=\Phi x(t)$ для некоторой мат-

* Статья публикуется по рекомендации программного комитета Всероссийской научно-технической конференции "Пром-Инжиниринг", https://icie-rus.org

рицы Φ, удовлетворяющей уравнениям [17-19]

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H_*, \qquad G_* = \Phi G. \tag{3}$$

В [18] рассмотрены две канонические формы реализации матрицы F_* – идентификационная и жорданова, где эта матрица имеет вид

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \text{ и } F_* = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix}$$

соответственно, собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ задаются разными и отрицательными. В [18] было показано, что в непрерывном случае предпочтительнее вторая форма, в дискретном – первая, поскольку собственные чисел этой матрицы в первом случае нулевые, что соответствует требованию устойчивости модели.

В этом случае первое уравнение в (3) может быть представлено в виде уравнений для строк матриц Φ и J_*:

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = 1, ..., k-1, \quad \Phi_k F = J_k H. \tag{4}$$

Дополнительное требование $\Phi L = 0$ – нечувствительность к возмущениям – учитывается следующим образом. Предварительно желательно проверить возможность построения модели, удовлетворяющей этому условию. Для этого введем матрицу L_0 максимального ранга, такую, что $L_0 L = 0$, тогда $\Phi = N L_0$ для некоторой матрицы N.

Поясним структуру вектора $y_0(t)$. Поскольку вектор $x'(t) = L_0 x(t)$ не чувствителен к возмущению, то $y_0(t) = N_1 x'(t)$ для некоторой матрицы N_1. С другой стороны, $y_0(t)$ представляет собой преобразованный вектор выхода $y(t)$, т.е. $y_0(t) = N_2 y(t)$ для некоторой матрицы N_2. Тогда для матриц N_1 и N_2 получаем уравнение $N_1 L_0 = N_2 H$, которое имеет решение, если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \operatorname{rank}(L_0) + \operatorname{rank}(H).$$

Если это условие выполняется, матрицы N_1 и N_2 определяются из уравнения

$$(N_1 \quad -N_2)\begin{pmatrix} L_0 \\ H \end{pmatrix} = 0.$$

Кроме уравнений (3) на матрицу Φ накладывается дополнительное условие, связанное со вторым уравнением в (2), которое вместе с $z(t) = Mx(t)$ представим в виде

$$Mx(t) = H_z \Phi x(t) + Q N_2 H x(t),$$

откуда следует уравнение

$$M = H_z \Phi + Q N_2 H = (H_z \quad Q)\begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix}, \tag{5}$$

имеющее решение, если

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Вернемся к проверке возможности построения модели, удовлетворяющей условию нечувствительности к возмущениям. На основе матрицы L_0 получается нескольких условий. Первое из них основывается на уравнениях (3) и имеет вид [17, 18]

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_0 F \\ H \\ L_0 \end{pmatrix} < \operatorname{rank}\begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} + \operatorname{rank}(L_0 F). \tag{7}$$

Для получения второго заменим в (5) Φ на $\Phi = N L_0$ и преобразуем:

$$M = (H_z N \quad Q)\begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \end{pmatrix}.$$

Условием разрешимости полученного уравнения является равенство

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Если условия (7) и (8) выполняются, то непосредственных препятствий для построения линейной модели, не чувствительной к возмущению, нет, и можно начинать процедуру. В противном случае ищется робастное решение.

Будем полагать что условия (7) и (8) выполняются. Тогда соотношения (4) вместе с условием $\Phi L = 0$ могут быть представлены в виде [17]

$$(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \ldots \quad -J_{*k})(W^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0, \tag{9}$$

где

$$W^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix}, \quad L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \ldots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \ldots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Для построения модели из (9) определяется строка $(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \ldots \quad -J_{*k})$, затем на основе соотношений (4) строится матрица Φ. Далее проверяется условие (6), выполнение которого означает, что матрица M может быть выражена через $(\Phi^{\mathrm{T}} \quad (N_2 H)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$ и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную $z = Mx$; матрицы H_z и Q определяются из алгебраического уравнения (5), G_* – из (3). Если условие (6) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (9). Результатом проделанной работы является линейная модель (2).

Построение нелинейной составляющей

Для построения нелинейной модели отметим, что поскольку система (1) содержит нелинейный член, матрица Φ должна удовлетворять дополнительному ограничению. Оно было получено в [17, 19] и имеет вид

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \\ A' \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где матрица A' состоит из тех строк $A_1, \ldots, A_q$, номера $j_1, ..., j_d$ которых совпадают с номерами ненулевых столбцов произведения ΦC.

После определения матрицы Φ проверяется условие (10); при его выполнении из соотношения

$$A_i' = A_{*i}\begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix}, \quad i = \overline{j_1, j_d} \tag{11}$$

рассчитываются строки $A_{*j_1}, \ldots, A_{*j_d}$ матрицы A_*, нелинейный член ищется в виде

$$C_*\Psi(x_*, y_*, u) = C_*\begin{pmatrix} \varphi_{j_1}(A_{*j_1}v, u) \\ \cdots \\ \varphi_{j_d}(A_{*j_d}v, u) \end{pmatrix},$$

где $v = (x_*^{\mathrm{T}} \;\; y_*^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, и добавляется в правую часть модели (2). Если условие (10) не выполняется, рекомендуется найти другое решение уравнения (9) или увеличить размерность k. Будем далее полагать, что условие (10) выполняется. Построенная нелинейная модель имеет вид

$$x_*(t+1) = F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y_*(t) + C_*\Psi(x_*, y_*, u),$$
$$z(t) = H_z x_*(t) + Qy_0(t).$$

Робастное решение

Если уравнение (9) не имеет решений или условие (6) не выполняется при всех $k < n$, модели, не чувствительной к возмущению, не существует. Рассмотрим подход к получению робастного решения, малочувствительного к возмущению, на основе композиции двух подсистем.

Предположим, что для матрицы Φ не выполняется условие (6). Для решения задачи, рассматривая по очереди строки матрицы M, выделим те из них, для которых условие (6) выполняется, и скомпонуем из них матрицу M', тогда вектор $z'(t) = M'x(t)$ будет не чувствительным к возмущению. Первая подсистема, оценивающая переменную $z'(t)$, строится по правилам, изложенным выше. Для оставшихся строк матрицы M, объединенных в матрицу M_0, вторая подсистема ищется в виде

$$\begin{aligned} x_0(t+1) &= F_*x_0(t) + G_0u(t) + J_0v(t), \\ z_0(t) &= H_0x_0(t) + Q_0y_0(t), \end{aligned} \tag{12}$$

где $z_0(t) = M_0x(t)$. Матрица Φ_0 такая, что $x_0(t) = \Phi_0x(t)$, определяется из уравнения

$$(\Phi_{10} \quad -J_{01} \quad \dots \quad -J_{0k})V_0^{(k)} = 0, \tag{13}$$

при минимальном k, где

$$V_0^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ H_cF^{k-1} \\ \vdots \\ H_c \end{pmatrix}, \qquad H_c = \begin{pmatrix} \Phi \\ H_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ H \\ M \end{pmatrix}.$$

Далее определяются строки матрицы Φ_0 и для нее проверяется условие (6) с заменой в нем матриц Φ, H и M на Φ_0, H_c и M_0 соответственно. При его выполнении рассчитываются матрицы $C_0 = \Phi_0C$, H_0, Q_0, $G_0 = \Phi_0G$ и строится линейная модель в форме (12) с последующим добавлением в нее нелинейной составляющей

$$C_0\begin{pmatrix} \varphi_{i_1}(A_{0i_1}v_0, u) \\ \cdots \\ \varphi_{i_g}(A_{0i_g}v_0, u) \end{pmatrix},$$

где $v_0 = (v^{\mathrm{T}} x_0^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, $i_1,...,i_g$ – номера ненулевых столбцов произведения $C_0 = \Phi_0C$. Строки $A_{0i_1},...,A_{0i_g}$ определяются из уравнения

$$A_i'' = A_{0i}\begin{pmatrix} \Phi_0 \\ H_c \end{pmatrix}, \qquad i = \overline{i_1, i_g},$$

где матрица A'' строится из строк матрицы A с номерами $i_1,...,i_g$.

Если условие (6) с указанной выше заменой в нем не выполняется, рекомендуется найти другое решение уравнения (13) или увеличить размерность k. Итоговая модель представляет собой композицию моделей (2) и (12) с добавлением к ним нелинейных составляющих.

Обеспечение устойчивости

Если $C_* = 0$, т.е. модель линейна, ее устойчивость гарантируется канонической формой матрицы F_*, в противном случае необходим дополнительный анализ; возможно, в модель необходимо будет ввести обратную связь. Рассмотрим это подробнее, предполагая, что функция $C_*\Psi(x_*, y_*, u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу x_*, т.е.

$$\| C_*\Psi(x_*', y_*, u) - C_*\Psi(x_*'', y_*, u) \| \le N_* \| x_*' - x_*'' \|, \tag{14}$$

где $N_* > 0$ – некоторая константа. Из устойчивости матрицы F_* следует, что существуют симметрические положительно-определенные матрицы P и W, удовлетворяющие условию

$$F_*^{\mathrm{T}}PF_* - P = -W. \tag{15}$$

Введем ошибку $e(t) = \Phi x(t) - x_*(t)$ и с учетом соотношений (3) запишем и преобразуем уравнение для нее:

$$\begin{aligned} e(t+1) &= \Phi(Fx(t) + Gu(t) + C\Psi(x(t), u(t)) - \\ &\quad - (F_*x_*(t) + G_*u(t) + J_*y_*(t) + \\ &\quad + C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) = \\ &= F_*e(t) + \Delta\Psi(t), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \Phi C\Psi(x(t), u(t)) - C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) = \\ &= C_*\Psi(\Phi x(t), y_*(t), u(t)) - C_*\Psi(x_*(t), y_*(t), u(t)) \end{aligned}.$$

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(t) = e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)$ и с учетом (14) и (15) найдем ее приращение:

$$\begin{aligned} V(t+1) - V(t) &= (F_*e(t) + \Delta\Psi(t))^{\mathrm{T}} P(F_*e(t) + \Delta\Psi(t)) - \\ &\quad - e^{\mathrm{T}}(t)Pe(t) = \\ &= e^{\mathrm{T}}(t)(F_*^{\mathrm{T}}PF_* - P)e(t) + \Delta\Psi(t)^{\mathrm{T}}P\Delta\Psi(t) + \\ &\quad + 2e^{\mathrm{T}}(t)F_*^{\mathrm{T}}P\Delta\Psi(t) \le \\ &\le -e^{\mathrm{T}}(t)We(t) + \| e(t) \|^2 \| P \| N^2 + 2\| e(t) \|^2 \| F_*^{\mathrm{T}}P \| N \le \\ &\le -\| e(t) \|^2 (\lambda_{\min}(W) - \| P \| N^2 - 2\| F_*^{\mathrm{T}}P \| N). \end{aligned}$$

Если выполняется $\lambda_{\min}(W) \ge \| P \| N^2 + 2\| F_*^{\mathrm{T}}P \| N$, то $V(t+1) - V(t) < 0$; следовательно, модель устойчива и обратную связь вводить не нужно. Отметим, что такой подход был рассмотрен в [20] в непрерывном варианте.

Подобный вывод может быть сделан, если ошибка $e(t)$ мала, функция $\Psi(x_*, y_*, u)$ дифференцируема по аргументу x_* и может быть разложена в ряд Тейлора относительно его текущего значения. Доказательство проведено в [19], поэтому, не повторяясь, отметим только, что если собственные числа матрицы

$$F_e(x_*, y_*, u) = F_* + C_* \begin{pmatrix} (\partial \varphi_{j_1}(x_*, y_*, u)/\partial x_*) A^1_{*j_1} \\ \dots \\ (\partial \varphi_{j_d}(x_*, y_*, u)/\partial x_*) A^1_{*j_d} \end{pmatrix}$$

лежат в окружности единичного радиуса, модель устойчива; здесь $A^1_{*j_1}, \dots, A^1_{*j_d}$ – это части матриц $A_{*j_1}, \dots, A_{*j_d}$, соответствующие переменной $x_*(t)$. В противном случае необходимо ввести обратную связь по сигналу невязки $r(t) = R_r y(t) - y_r(t)$, где R_r – матрица, удовлетворяющая условию $R_r H = H_r \Phi$ для матрицы H_r, $y_r(t) = H_r x_*(t)$ [17]. Найти эти матрицы можно из уравнения

$$(H_r \quad -R_r) \begin{pmatrix} \Phi \\ H \end{pmatrix} = 0,$$

для существования решения которого может потребоваться увеличение размерности модели. Когда матрицы R_r и H_r найдены, в нелинейную модель вводится обратная связь $Kr(t)$:

$$x_*(t+1) = F_* x_*(t) + G_* u(t) + J_* y_*(t) + \\ + C_* \Psi(x_*(t), y_*(t), u(t) + Kr(t),$$

в результате чего уравнение для ошибки принимает вид

$$e(t+1) = \left(F_* - KH_r + C_* \begin{pmatrix} (\partial \varphi_{j_1}(x_*, y_*, u)/\partial x_*) A^1_{*j_1} \\ \dots \\ (\partial \varphi_{j_d}(x_*, y_*, u)/\partial x_*) A^1_{*j_d} \end{pmatrix} \right) e(t),$$

из которого следует, что элементы матрицы обратной связи K в этом случае будут зависеть от переменных $x_*(t), y_*(t), u(t)$. Метод определения этих элементов рассмотрен в [19].

Пример

Рассмотрим систему управления

$$\begin{aligned} &x_1(t+1) = a_4 u_1(t) - a_1\sqrt{x_1(t) - x_2(t)} + x_1(t) + \rho(t), \\ &x_2(t+1) = a_5 u_2(t) + a_1\sqrt{x_1(t) - x_2(t)} - \\ &\qquad - a_2\sqrt{x_2(t) - x_3(t)} + x_2(t), \qquad (16) \\ &x_3(t+1) = a_2\sqrt{x_2(t) - x_3(t)} - a_3\sqrt{x_3(t)} + x_3(t), \\ &y(t) = x_2(t). \end{aligned}$$

Приведенные уравнения описывают дискретизованную модель так называемой трехтанковой системы, описанной в [1]. Построим функциональный наблюдатель, оценивающий переменные $z_1(t) = x_1(t)$ и $z_2(t) = x_3(t)$,

Рассмотрим логико-динамический подход к решению задачи. Поскольку $F = 0$ в модели (16), прямое применение этого подхода невозможно. Для преодоления этой трудности преобразуем уравнения (16): добавим в первое уравнение формальный член $-a_1(x_1 - x_2) + a_1(x_1 - x_2)$, первый элемент которого отнесем к линейной части, второй – к нелинейной. Во второе уравнение добавим член $a_1(x_1 - x_2) - a_2(x_2 - x_3) - a_1(x_1 - x_2) + a_2(x_2 - x_3))$, в третье – член $a_2(x_2 - x_3) - a_3 x_3 - a_2(x_2 - x_3) + a_3 x_3$. В результате система описывается следующими матрицами и нелинейностями:

$$F = \begin{pmatrix} 1-a_1 & a_1 & 0 \\ a_1 & 1-a_1-a_2 & -a_2 \\ 0 & a_2 & 1-a_2-a_3 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} a_4 & 0 \\ 0 & a_5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = (0 \quad 1 \quad 0), \quad L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ -a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_3 \end{pmatrix}, \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} -\sqrt{A_1 x} + A_1 x \\ -\sqrt{A_2 x} + A_2 x \\ -\sqrt{A_3 x} + A_3 x \end{pmatrix},$$

$$A_1 = (1 \quad -1 \quad 0), \quad A_2 = (0 \quad 1 \quad -1), \quad A_3 = (0 \quad 0 \quad 1).$$

Так как необходимо оценивать $x_1(t)$ и $x_3(t)$, то

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица N_2 определяется из уравнения

$$(N_1 \quad N_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

откуда $N_2 = 1$, что дает $H_0 = H = (0 \quad 1 \quad 0)$.

Уравнение (9) имеет решение при $k = 1$: $\Phi = (0 \quad 0 \quad 1)$, $J_* = (a_2 \quad 0 \quad 1 - a_2 - a_3)$. Можно проверить, что условие (6) не выполняется; нетрудно видеть, что $M' = (0 \quad 0 \quad 1)$ и $M_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$.

Решение для M' с $\Phi = (0 \quad 0 \quad 1)$ дает матрицы $G_* = (0 \quad 0)$, $C_* = (0 \quad -a_2 \quad a_3)$, $j_1 = 2$, $j_2 = 3$ и $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Уравнение (11) имеет решение $A_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Линейная модель, соответствующая M' с $x_* = M'x = z_2$, имеет вид

$$x_*(t+1) = a_2 y(t) + (1 - a_2 - a_3) x_*(t);$$

нелинейный член описывается выражением

$$C_* \Psi(x_*(t)) = a_2\sqrt{y(t) - x_*(t)} - a_2(y(t) - x_*(t)) - \\ - a_3\sqrt{x_*(t)} + a_3 x_*(t),$$

После подстановки этого члена в линейную модель и ряда преобразований получаем модель

$$x_*(t+1) = a_2\sqrt{y(t) - x_*(t)} - a_3\sqrt{x_*(t)} + x_*(t).$$

Для M_0 уравнение (13) имеет решение при $k = 1$: $\Phi_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$, $J_* = (1 \quad 0 \quad 0)$, что дает $G_0 = (a_4 \quad 0)$, $C_0 = (a_1 \quad 0 \quad 0)$, $j_1 = 1$ и $A_0 = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 0)$. Линейная модель, соответствующая M_0 с $x_0 = M_0 x = z_1$, имеет вид

$$x_0(t+1) = a_4 u_1(t) + a_1 y(t) + (1 - a_1) x_0(t);$$

нелинейный член описывается следующим образом:

$$C_0 \Psi(x(t)) = -a_1\sqrt{x_0(t) - y(t)} + a_1(x_0(t) - y(t)).$$

После подстановки этого члена в линейную модель и ряда преобразований получаем модель

$$x_0(t+1) = a_4 u_1(t) - a_1\sqrt{x_0(t) - y(t)} + x_0(t).$$

Можно проверит, что построенные модели устойчивы и могут быть использованы по назначению.

Заключение

В работе рассмотрена задача построения функциональных наблюдателей для технических систем, описываемых нелинейными моделями в условиях действия внешних возмущений. Предложен способ решения на основе логико-динамического подхода, дающего решение нелинейных задач методами линейной алгебры. Получены расчетные соотношения, позволяющие построить наблюдатели, не чувствительные к возмущениям. Теоретические результаты иллюстрированы примером реальной системы.

Работа поддержана Российским научным фондом, проект 23-29-00191.

Литература

1. Angulo M. On functional observers for linear systems with unknown inputs and HOSM differentiators / M. Angulo, J. Moreno, L. Fridman // J. Frankl. Inst. – 2014. – Vol. 351. – P. 1982-1994.
2. Chen W. Impulsive functional observers for linear systems / W. Chen, D. Li, X. Lu // Int. J. Control Autom. and Systems. – 2011. – Vol. 9. – P. 987-992.
3. Darouach M. Linear functional observers for systems with delays in State variables: the discrete-time case // IEEE Trans. on Automatic Control. – 2005. – Vol. 50. – P. 228-233.
4. Deng H. Functional observers for linear systems with unknown inputs / H. Deng, H. Li // Asian J. Control. – 2004. – Vol. 6. – P. 462-468.
5. Gu D. Functional interval observer for the linear systems with disturbances / D. Gu, L. Liu, G. Duan // IET Control Theory and Applications. – 2018. – Vol. 12. – P. 2562-2568.
6. Liu L. Finite-time functional interval observer for linear systems with uncertainties / L. Liu, W. Xie, A. Khan, L. Zhang // IET Control Theory and Applications. – 2020. – Vol. 14. – P. 2868-2878.
7. Meyer L. Robust functional interval observer for multivariable linear systems // J. Dynamic Systems, Measurement, and Control. – 2019. – Vol. 141. – Art. no. 094502.
8. Kravaris C. Functional observers with linear error dynamics for nonlinear systems / C. Kravaris, S. Venkateswaran // Systems Control Lett. – 2021. – Vol. – P. 157.
9. Liu L. Impulsive functional observer design for fractional-order nonlinear systems satisfying incremental quadratic constraints / L. Liu, Y. Shang, Y. Di // Circuits Syst. Signal Process. – 2022. – Vol. 41. – P. 3130-3152.
10. Trinh H. Functional observers for dynamical systems / H. Trinh, T. Fernando. – Berlin Heidelberg: Springer, 2012.
11. Venkateswaran S. Design of linear residual generators for fault detection and isolation in nonlinear systems / S. Venkateswaran, Q. Liu, B. Wilhite, C. Kravaris // Int. J. Control. – 2022. – Vol. 95. – P. 804-820.
12. Islam S. Existence of fuzzy functional observer of Takagi-Sugeno fuzzy model / S. Islam, C. Lim, P. Shi // Proc. 2016 Australian Control Conf. (AuCC), Newcastle, Australia, – 2016. – P. 353-357.
13. Islam S. Functional observer-based fuzzy controller design for continuous nonlinear systems / S. Islam, C. Lim, P. Shi // Int. J. Systems Science. – 2018. – Vol. 2. – P. 34-42.
14. Hamzaoui F. A new functional observer design of delayed singular systems in discrete-time and frequency domains / F. Hamzaoui, M. Khadhraoui, H. Messaoud // Proc. 2020 Int. Conf. on Control, Autom. and Diagnosis, – 2020. – P. 1-6.
15. Khadhraoui M. Design of a functional observer for non-linear singular delayed systems / M. Khadhraoui, H. Messaoud // Proc. 2020 Int. Conf. on Control, Autom. and Diagnosis/ – 2020. – P. 1-7.
16. Islam S. Robust fault detection of T-S fuzzy systems with time-delay using fuzzy functional observer / S. Islam, C. Lim, P. Shi // Fuzzy Sets Sys. – 2020. – Is. 8.
17. Жирабок А.Н. Метод построения нелинейных робастных диагностических наблюдателей / А.Н. Жирабок, А.Е. Шумский, С.П. Соляник, А.Ю. Суворов // Автоматика и телемеханика. – 2017. – № 9. – С. 34-48.
18. Жирабок А.Н. Каноническая форма Жордана в задачах диагностирования и оценивания / А.Н. Жирабок, А.В. Зуев, В.Ф. Филаретов, А.Е. Шумский, Ким Чхун Ир // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 9. – С. 49-67.
19. Жирабок А.Н., Ким Чхун Ир Виртуальные датчики в задаче функционального диагностирования нелинейных систем / А.Н. Жирабок, Ким Чхун Ир // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2022. – № 1. – С. 40-48.
20. Misawa E. Nonlinear observers - a state of the art. Survey / E. Misawa, J. Hedrick // J. Dynamic Systems, Measurements and Control. – 1989. – Vol. 111. – P. 344-352.

DOI: 10.24892/RIJIE/20230307

Functional Observer Design

Zhirabok A., Bobko E., Kim Chung Il
Far Eastern Federal University
Vladivostok, Russian Federation
zhirabok@mail.ru

Zuev A.V.
Institute of Marine Technology Problems
Vladivostok, Russian Federation
alvzuev@yandex.ru

Abstract. **The problem of functional observer design for nonlinear systems described by discrete-time models under the external disturbances. The relations allowing to design observer of minimal dimension invariant with respect to the disturbances or having minimal sensitivity to them and estimating the specified function of the state vector. The logic-dynamic approach is used to solve the problem allowing to solve the problem for nonlinear systems by linear algebra methods. The theoretical results are illustrated by practical example.**

Keywords: **nonlinear systems, functional observers, reduced-order model, logic-dynamic approach.**