

# Расчет нормальной жесткости шины по радиусу качения колеса при проектном моделировании движения машины\*

Балакина Е.В., Коньшин А.А., Коньшин В.А., Санжапов Р.Р.  
 ФГБОУ ВО «Волгоградский государственный технический университет»  
 г. Волгоград, Российская Федерация  
[fahrgestell2011@yandex.ru](mailto:fahrgestell2011@yandex.ru)

**Аннотация.** Исследование относится к области конструирования колесных машин, в частности, к определению жесткости опорных колес при проектном моделировании устойчивого движения машины.

Цель исследования – разработка методики расчета нормальной жесткости шины через радиус качения.

Разработана методика расчета нормальной жесткости шины заданного свободного радиуса при нормируемом давлении и при рекомендуемой вертикальной нагрузке. Предлагается рассчитывать нормальную жесткость шины через радиус качения по одной полученной формуле, а также через относительную деформацию по другой полученной формуле. Параметры «радиус качения» и «относительная деформация» связаны между собой найденной зависимостью.

Для оценки достоверности разработанной методики расчета нормальной жесткости шин через радиус качения результаты расчета по ней сравнены с результатами расчета по существующим универсальным расчетно-экспериментальным зависимостям в виде показательных функций.

Всего было рассмотрено 196 моделей грузовых радиальных шин производителя №1 (Michelin), 186 моделей грузовых радиальных шин производителя №2 (Goodyear); 49 моделей легковых радиальных шин разных производителей (Pirelli, Danlop, Michelin). Максимальная погрешность расчета их нормальной жесткости по методике радиуса качения не превышает 20%, а средняя погрешность не превышает 8%.

**Ключевые слова:** колесная машина, проектное моделирование, шина, нормальная жесткость, расчет, радиус качения.

## ВВЕДЕНИЕ

Задача проектного моделирования свойств устойчивости, управляемости и тормозной динамики колесной машины (КМ) – выбор числовых значений конструктивных параметров элементов шасси: колеи и базы, радиусов опорных колес, углов установки управляемых колес, геометрических характеристик рулевого управления, упруго-демпфирующих характеристик подвески [1-5]. Для этого математически описывают движение КМ с учетом негативных явлений: бокового увода всех опорных колес, горизонтально-угловых колебаний управляемых колес, продольного и поперечного перераспределения нормальных нагрузок [6-7]. Эти явления ухудшают устойчивость и управляемость КМ и отклоняют ее от заданной траектории движения, особенно при торможении. Назначение проектного выбора конструктивных параметров шасси – уменьшение отрицательного воздействия этих явлений.

В математическом описании движения КМ присутствуют жесткости шин: нормальная жесткость, боковая жесткость и др. В табл. 1 рассмотрены общие взаимосвязи эксплуатационных свойств КМ и упругих свойств шин и соответствующие характеристики жесткости. Рис. 1 дополнительно поясняет сказанное.

В частности, нормальная жесткость шины определяет нормальную деформацию под нагрузкой и длину пятна контакта:

Таблица 1

Взаимосвязи характеристик жесткости шин и эксплуатационных свойств КМ

Эксплуатационное свойство КМ	Явление, определяющее или влияющее на эксплуатационное свойство в наибольшей степени	Вид деформации шины, в наибольшей степени определяющий указанное явление	Характеристика жесткости шины, определяющая указанный вид деформации
Устойчивость движения и управляемость	Боковой увод колеса	Боковая деформация	Боковая жесткость шины
		Радиальная деформация	Нормальная жесткость шины
	Нарушение контакта колес с опорной поверхностью	Радиальная деформация	Нормальная жесткость шины
		Продольная деформация	Продольная жесткость шины
		Боковая деформация	Боковая жесткость шины
Угловые колебания УК вокруг осей	Угловая деформация	Угловая жесткость шины	
	Крутильные колебания в трансмиссии	Крутильная деформация	Крутильная жесткость шины
Сопrotивление качению автомобиля		Радиальная деформация	Нормальная жесткость шины
Тягово-скоростные свойства	Колесные колебания	Радиальная деформация	Нормальная жесткость шины
Виброзащищенность (плавность хода)	Колебания поддрессоренной массы	Радиальная деформация	Нормальная жесткость шины

\* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00004, <https://rscf.ru/project/23-21-00004/>. Статья публикуется по рекомендации программного комитета Всероссийской научно-технической конференции "Пром-Инжиниринг", <https://icie-rus.org>

$$Z_t = \frac{P_z}{C_{tz}},$$

где  $C_{tz}$  – нормальная жесткость шины;  $P_z$  – нормальная нагрузка колеса;  $Z_t$  – нормальная деформация шины, определяемая как [8]:

$$l_c = 2K_h \sqrt{Z_t \cdot (2r_0 - Z_t)}$$

где  $l_c$  – длина пятна контакта;  $r_0$  – свободный радиус шины;  $K_h$  – коэффициента учета уменьшения длины пятна контакта ( $K_h = 0,7$  для всех шин, кроме низкопрофильных;  $K_h = 0,6$  для низкопрофильных шин).

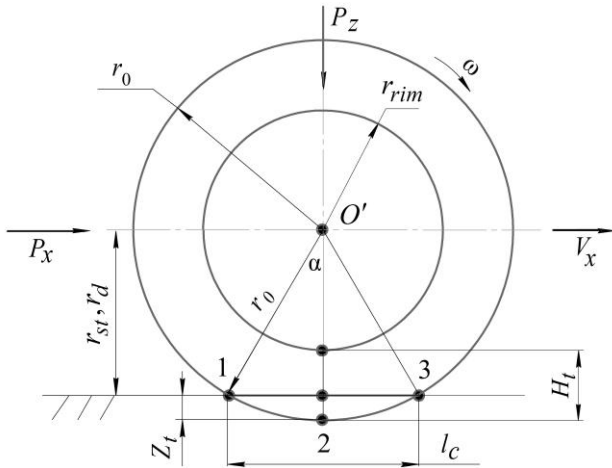


Рис. 1. Схема колеса

Нормальная деформация шины и длина пятна контакта влияют на величину бокового увода.

В соответствии с деформационной теорией, в общем случае

$$\text{tg } \delta \approx Y_t; \frac{1}{l_c}; s_x,$$

где  $\delta$  – угол бокового увода колеса;  $Y_t$  – боковая деформация шины;  $l_c$  – длина пятна контакта;  $s_x$  – коэффициент продольного скольжения колеса.

Коэффициент продольного скольжения колеса по определению

$$s_x = \frac{V_x - \omega \cdot r_r}{V_x},$$

где  $V_x$  – поступательная скорость оси колеса;  $\omega$  – угловая скорость колеса;  $r_r$  – радиус качения колеса.

В соответствии с приведенными формулами взаимосвязь нормальной жесткости шины и бокового увода прямо пропорциональна

$$\delta \approx C_{tz}.$$

При этом боковая жесткость шины также влияет на увод через боковую деформацию

$$Y_t = \frac{P_y}{C_{ty}},$$

где  $C_{ty}$  – боковая жесткость шины;  $P_y$  – боковая сила колеса;  $Y_t$  – боковая деформация шины.

Таким образом, взаимосвязь боковой жесткости шины и бокового увода обратно пропорциональна

$$\delta \propto \frac{1}{C_{ty}}.$$

Жесткости шины можно определять разными способами: экспериментально; расчетом по существующим универсальным зависимостям; расчетом по новой предлагаемой методике через радиус качения.

Измерять жесткости шин экспериментально трудно и дорого. Существуют разные универсальные зависимости для приближенного расчета жесткостей шин. Некоторые из них приведены в табл. 2 и 3.

Таблица 2

Зависимости для расчета нормальной жесткости эластичного колеса с горизонтальной осью вращения [9]

Шины	Функция для расчета жесткости	
	Квадратичная	Показательная
Легковые радиальные	$C_{tz} = 48,2 \cdot P_z - 2,89 \cdot P_z^2$	$C_{tz} = 1,6221 \cdot P_z^{0,544}$
Легковые диагональные	–	$C_{tz} = 0,3311 \cdot P_z^{0,753}$
Все легковые	$C_{tz} = 47,23 \cdot P_z - 2,306 \cdot P_z^2$	$C_{tz} = 1,0739 \cdot P_z^{0,60}$
Грузовые радиальные	$C_{tz} = 38,24 \cdot P_z - 0,263 \cdot P_z^2$	$C_{tz} = 0,3240 \cdot P_z^{0,773}$
Грузовые диагональные	$C_{tz} = 52,06 \cdot P_z - 0,84 \cdot P_z^2$	$C_{tz} = 6,1506 \cdot P_z^{0,473}$
Все грузовые	$C_{tz} = 39,63 \cdot P_z - 0,337 \cdot P_z^2$	$C_{tz} = 0,9805 \cdot P_z^{0,661}$

В табл. 2:  $C_{tz}$  – в Н/мм;  $P_z$  – для квадратичной функции в кН, для показательной функции – в Н.

Таблица 3

Зависимости для расчета боковой жесткости эластичного колеса с горизонтальной осью вращения [10]

Формула	Значение постоянных коэффициентов	
	a	b
$C_{ty} = a \cdot P_z^b$	$a_1$	$b_1$
$C_{ty} = a \cdot P_z + b \cdot P_z^2$	$a_2$	$b_2$

В табл. 3:  $P_z$  – в  $10^{-1}$  Н;  $C_{ty}$  – в Н/мм;  $a, b$  – безразмерные коэффициенты.

МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ

Радиус качения [11-15] шины можно определить экспериментально по пройденному пути

$$r_r = \frac{L_t}{2\pi},$$

где  $L_t$  – путь, пройденный колесом за 1 оборот.

Также радиус качения можно рассчитать по полученной ранее приближенной зависимости [16]:

$$r_r \approx r_0 \left( 1 + \frac{k_h \sqrt{n(2-n)} - \arcsin(k_h \sqrt{n(2-n)})}{\pi} \right), \quad (1)$$

где  $n$  – относительная радиальная деформация шины

( $n = \frac{Z_t}{r_0}$ );  $Z_t$  – нормальная деформация шины;  $r_0$  – сво-

бодный радиус шины;  $k_h$  – коэффициент учета уменьшения длины пятна контакта (0,6 – для низкопрофильных шин и 0,7 – для остальных) [16].

Установлено, что округление коэффициента  $k_h$  до 1 практически не влияет на результаты расчета радиуса качения по формуле (1). Поэтому допустимо считать, что

$$r_r \approx r_0 \left( 1 + \frac{\sqrt{n(2-n)} - \arcsin(\sqrt{n(2-n)})}{\pi} \right).$$

С использованием среды Matlab эту функцию удалось упростить до выражения (2):

$$\frac{r_r}{r_0} \approx 1 - 0,075 \cdot n \Rightarrow n = \frac{1 - (r_r/r_0)}{0,075}. \quad (2)$$

Некоторые производители измеряют радиус качения шин и вносят их в каталоги [17-19]. Это дает возможность также определения экспериментальных значений относительной радиальной деформации шины  $n$  по формуле (2):

По определению  $n = \frac{Z_t}{r_0}$ . Приравняв эти зависимости, после математических преобразований получим

$$Z_t \approx \frac{r_0 - r_r}{0,075}. \quad (3)$$

Т.к. нормальная жесткость шины

$$C_{tz} = \frac{P_z}{Z_t}, \text{ то } C_{tz} \approx \frac{0,075 P_z}{r_0 - r_r}. \quad (4)$$

С учетом выражения (2)

$$C_{tz} \approx \frac{0,075 P_z}{r_0 - (r_0 - 0,075 r_0 \cdot n)} = \frac{0,075 P_z}{0,075 r_0 \cdot n} = \frac{P_z}{r_0 \cdot n};$$

$$C_{tz} \approx \frac{P_z}{r_0 \cdot n}. \quad (5)$$

Таким образом, нормальная жесткость  $C_{tz}$  шины свободного радиуса  $r_0$  при нормируемом давлении и при вертикальной нагрузке  $P_z$  может быть определена через радиус качения  $r_r$  по формуле (4), а также через относительную деформацию  $n$  по формуле (5). Параметры  $r_r$  и  $n$  связаны между собой зависимостями (2).

Значение  $r_r$  можно определить делением на  $2\pi$  экспериментальной величины длины окружности обкатки шины (Abrollumfang) по данным завода-изготовителя с погрешностью до 2,5%. В случае отсутствия такого значения, эту величину можно рассчитать по теоретической зависимости (1). Однако для использования этой зависимости также необходимо знать относительную деформацию  $n$ . Максимальные значения  $n$  современных радиальных шин, соответствующие максимальным нормальным деформациям  $Z_t$ , рассчитаны авторами и приведены в табл. 4 (для легковых и грузовых шин) [20]. Формула (1) позволяет вычислять значения  $n$ , соответствующие не только максимальным, но и текущим нормальным деформациям  $Z_t$  шины.

Параметры шин

№	Характеристика профиля	Отношение высоты профиля к ширине $\frac{H_t}{B_t}$	$n = \frac{Z_t}{r_0}$	$n' = \frac{Z_t}{H_t}$	$\frac{H_t}{r_0}$
1	Обычный	0,65...1	0,11	0,26	0,42
2	Низкий	0,5...0,65	0,09		0,35
3	Сверхнизкий	0,25...0,5	0,07		0,27

Для оценки достоверности разработанной методики расчета нормальной жесткости шин через радиус качения  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  результаты расчета по ней сравнены с результатами расчета по универсальным расчетно-экспериментальным зависимостям  $C_{tz} = f(P_z)$  в виде показательных функций. Это формулы из табл. 2 для соответствующих типов шин.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

1. Произведены расчеты нормальной жесткости  $C_{tz}$  шин колес с горизонтальной осью вращения, свободного радиуса  $r_0$  при нормируемых давлении в шине и вертикальной нагрузке  $P_z$  на нее по предложенной методике (через радиус качения) и по расчетно-экспериментальной зависимости (из табл. 2) для грузовых радиальных шин. Всего было рассмотрено 196 моделей шин производителя №1 (Michelin) и 186 моделей шин производителя №2 (Goodyear). Результаты сравнения приведены на рис. 2 и 3.

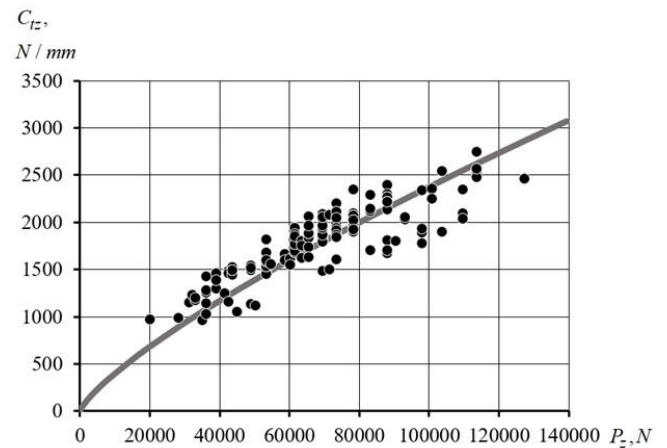


Рис. 2. Расчет нормальной жесткости грузовых радиальных шин производителя №1 (Michelin): линия – расчет по универсальной зависимости  $C_{tz} = f(P_z)$  для грузовых радиальных шин; точки – расчет по теоретической зависимости  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$

Максимальная погрешность расчета нормальной жесткости грузовых радиальных шин производителя №1 по методике радиуса качения  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  не превышает 20%, а средняя погрешность не превышает 8%. Максимальная погрешность расчета нормальной жесткости грузовых радиальных шин производителя №2 по методике  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  не превышает 20%, а средняя погрешность не превышает 10%.

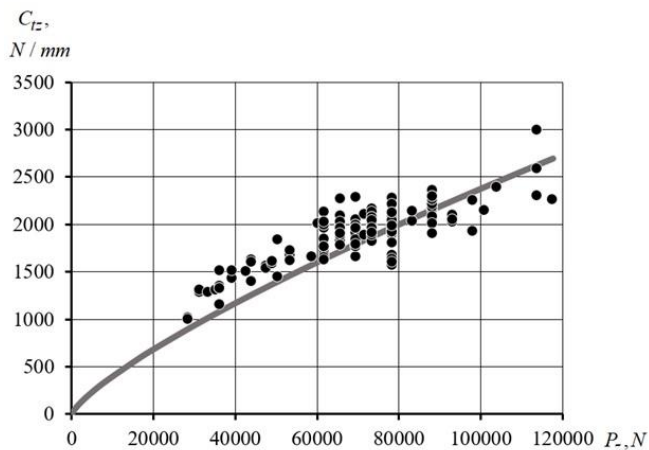


Рис. 3. Расчет нормальной жесткости грузовых радиальных шин производителя №2 (Goodyear): линия – расчет по универсальной расчетно-экспериментальной зависимости  $C_{tz} = f(P_z)$  для грузовых радиальных шин; точки – расчет по теоретической зависимости  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$

2. Произведены расчеты нормальной жесткости  $C_{tz}$  шин колес с горизонтальной осью вращения, свободного радиуса  $r_0$  при нормируемых давлении в шине и вертикальной нагрузке  $P_z$  на нее по предложенной методике (через радиус качения) и по расчетно-экспериментальной зависимости (из табл. 2) для легковых радиальных шин.

Всего было рассмотрено 49 моделей шин разных производителей (Pirelli, Danlop, Michelin). Результаты сравнения приведены на рис. 4.

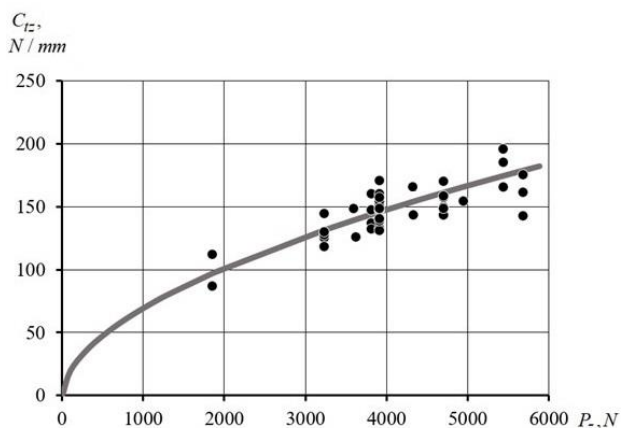


Рис. 4. Расчет нормальной жесткости легковых радиальных шин разных производителей (Pirelli, Danlop, Michelin):

линия – расчет по универсальной расчетно-экспериментальной зависимости  $C_{tz} = f(P_z)$  для легковых радиальных шин; точки – расчет по теоретической зависимости  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$

Максимальная погрешность расчета нормальной жесткости легковых радиальных шин разных производителей по методике  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  не превышает 20%, а средняя погрешность не превышает 8%.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ (ВЫВОДЫ)

Таким образом, нормальную жесткость шины колеса с горизонтальной осью вращения, с заданным свободным радиусом при нормируемых давлении в шине и вертикальной нагрузке можно определить экспериментально или вычислить тремя способами:

1. По универсальным расчетно-экспериментальным зависимостям вида  $C_{tz} = f(P_z)$  – с максимальной погрешностью до 17% и средней погрешностью до 14%;

2. По теоретической зависимости вида  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  с использованием значения радиуса качения – с максимальной погрешностью до 23% и средней погрешностью до 16%;

3. По теоретической зависимости вида  $C_{tz} = f(P_z; r_0; r_r)$  с использованием значения относительной нормальной деформации с максимальной погрешностью до 23% и средней погрешностью до 16%;

4. Погрешности расчета нормальной жесткости грузовых шин по всем методикам существенно ниже, чем легковых (в 1,5...2 раза).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Балабин И.В. Колеса и шины для мобильных машин / И.В. Балабин, И.С. Чабунин. – М.: Издательство «Спутник +», 2019. – 948 с.

2. Кравец В.Н. Теория автомобиля: Учебник для вузов / В.Н. Кравец, В.В. Селифонов. – М.: ООО «Гринлайт+», 2011. – 884 с.

3. Ларин В.В. Теория движения полноприводных колесных машин: Учебник для вузов. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. – 396 с.

4. Тарасик В.П. Теория движения автомобиля: Учебник для вузов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2022. – 576 с.

5. Селифонов В.В. Теория автомобиля: Учебное пособие. – М.: Гринлайт, 2009. – 208 с.

6. Pacejka H.B. Tire and Vehicle Dynamics. – USA: Elsevier Ltd, 2012. – 672 p.

7. Reza N. Jazar Vehicle Dynamics: Theory and Application. – Springer Science + Business Media, 2008. – 1015 p.

8. Balakina E.V. The calculation method of the length of contact of car tires with the road surface / E.V. Balakina, V.N. Zadvornov, D.S. Sarbaev, I.V. Sergienko, Y.N. Kozlov // Proc. International Conference on Innovations in Automotive and Aerospace Engineering (Irkutsk, Russia, 27 May - 1 June, 2019). – IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2019. – Vol.632. – DOI:10.1088/1757-899X/632/1/012022.

9. Балакина Е.В. Исследование коэффициентов жёсткости шин. Коэффициент радиальной жёсткости / Е.В. Балакина, В.Н. Задворнов, М.С. Березовский, В.Р. Блажинский, А.А. Коньшин, А.С. Юсупкина // Автомобильная промышленность. – 2020. – № 8. – С. 7-10.

10. Балакина Е.В. Исследование коэффициентов жёсткости шин. Коэффициент боковой жёсткости / Е.В. Балакина, В.Н. Задворнов, М.С. Березовский, А.С. Юсупкина // Автомобильная промышленность. – 2020. – № 9. – С. 18-20.

11. Viehweger M. Vehicle state and tyre force estimation: demonstrations and guidelines / M.Viehweger, C. Vaseur, S. van Aalst, M. Acosta, E. Regolin, A. Alatorre, V. Ivanov, A. Victorino // Vehicle System Dynamics. – 2020. – DOI: 10.1080/00423114.2020.1714672.



12. Дик А.Б. О радиусе эластичного колеса // Автомобильная промышленность. – 2020. – №10. – С.21-28.

13. Balakina E.V. Analysis of Various Types of Elastic Wheel Radii and Establishing Necessity and Sufficiency of Their Application for Various Problems / E.V. Balakina, I.V. Sergienko, R.R. Sanzhapov // Proc. of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020) (Sochi, Russia, 18-22 May, 2020). – Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2021. – Vol. I. – P. 9-16. – DOI: 10.1007/978-3-030-54814-8\_2.

14. Пожидаев С.П. О некоторых уточнениях теории качения эластичного колеса // Автомобильная промышленность. – 2013. – №12 – С.13-15.

15. Пожидаев С.П. О теории качения эластичного колеса с позиций механики // Автомобильная промышленность. – 2014. – №11 – С.16-17.

16. Balakina E.V. Calculation of the Wheel Rolling Radius at Design Modeling of a Wheeled Vehicle / E.V. Balakina, Kislov A.I., Malkov V.A., D.V. Bruev // Proc. of the 8th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2022)

(Sochi, Russia, 16-20 May, 2022) – Lecture Notes in Mechanical Engineering. – 2023. – P. 32-39.

17. Reifen-Ratgeber 2021 Pkw |4 x 4| Van. – URL: [https://www.continental-tires.com/content/dam/conti-tires-cms/continental/market-content/de/b2b/händlerbereich/CO\\_Reifenratgeber2021\\_PDF\\_DE\\_PLT.pdf](https://www.continental-tires.com/content/dam/conti-tires-cms/continental/market-content/de/b2b/händlerbereich/CO_Reifenratgeber2021_PDF_DE_PLT.pdf) (дата обращения 20.01.2022).

18. Michelin Nutzfahrzeugreifen: Technische Broschüre / Michelin Reifenwerke AG & Co. KGaA – Karlsruhe: Michelin, 2019. – 164 p.

19. Goodyear Truck Tyres. Technical Data Book – URL: [https://www.internationaltyres.com/wp-content/uploads/2023/11/202005\\_GOODYEAR\\_TTDB\\_LU-EN\\_LoRes-final.pdf](https://www.internationaltyres.com/wp-content/uploads/2023/11/202005_GOODYEAR_TTDB_LU-EN_LoRes-final.pdf) (дата обращения 20.01.2022).

20. Балакина Е.В. Исследование предельных радиальных деформаций автомобильных шин / Е.В. Балакина, Д.В. Бруев, В.А. Мальков, А.И. Кислов // Грузовик. – 2022. – №8. – С.31-34. – DOI: 10.36652/1684-1298-2022-8-31-34.

DOI: 10.24892/RIJIE/20240407

# Calculation of Normal Tire Stiffness Using Wheel Rolling Radius at Design Modeling of Machine Movement

Balakina E.V., Konshin A.A., Konshin V.A., Sanzhapov R.R.

Volgograd State Technical University  
Volgograd, Russian Federation  
[fahrgestell2011@yandex.ru](mailto:fahrgestell2011@yandex.ru)

**Abstract.** The research relates to the field of design of wheeled vehicles, in particular, to the determination of the stiffness of the support wheels during numerical modeling of stable vehicle movement.

The purpose of the research is to design a method for calculating the normal tire stiffness using the rolling radius. A method has been developed for calculating the normal tire stiffness of a given free radius at a standardized pressure and at a recommended vertical load. It is proposed to calculate the normal tire stiffness using the rolling radius according to one obtained formula, as well as through the relative deformation according to another obtained formula. The parameters "rolling radius" and "relative deformation" are related by the found dependence.

To assess the reliability of the developed method for calculating the normal tire stiffness using the rolling radius, the calculation

results are compared with the calculation results based on existing universal computational and experimental dependencies in the form of exponential functions.

In total, 196 models of radial truck tires from manufacturer No. 1 (Michelin), 186 models of radial truck tires from manufacturer No. 2 (Goodyear), 49 models of passenger radial tires from different manufacturers (Pirelli, Danlop, Michelin) were considered. The maximum error in calculating their normal stiffness according to the rolling radius method does not exceed 20%, and the average error does not exceed 8%.

**Keywords:** wheeled vehicle, design modeling, tire, normal stiffness, calculation, rolling radius.

## Библиографическое описание статьи

Балакина Е.В. Расчет нормальной жесткости шины по радиусу качения колеса при проектном моделировании движения машины / Е.В. Балакина, А.А. Коньшин, В.А. Коньшин, Р.Р. Санжапов // Машиностроение: сетевой электронный научный журнал. – 2024. – Т.11, №4. – С. 41-45. DOI: 10.24892/RIJIE/20240407

## Reference to article

Balakina E.V., Konshin A.A., Konshin V.A., Sanzhapov R.R. Calculation of normal tire stiffness using wheel rolling radius at design modeling of machine movement, *Russian Internet Journal of Industrial Engineering*, 2024, vol.11, no.4, pp. 41-45. DOI: 10.24892/RIJIE/20240407